Chapter-4

समतल में गति

Motion in a Plane

प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित भौतिक राशियों में से बतलाइए कि कौन-सी सदिश हैं और कौन-सी अदिश आयतन, द्रव्यमान, चाल, त्वरण, घनत्व, मोल संख्या, वेग, कोणीय आवृत्ति, विस्थापन, कोणीय वेग?

हल अदिश राशियाँ आयतन, द्रव्यमान, चाल, घनत्व, मोल संख्या तथा कोणीय आवृत्ति

सदिश राशियाँ त्वरण, वेग, विस्थापन तथा कोणीय वेग।

प्रश्न 2. निम्नांकित सूची में से दो अदिश राशियों को छाँटिए
बल, कोणीय संवेग, कार्य, धारा, रैखिक संवेग, विद्युत क्षेत्र, औसत वेग, चुंबकीय आघूर्ण, आपेक्षिक वेग।

हल कार्य तथा धारा अदिश राशियाँ हैं।

प्रश्न 3. निम्नलिखित सूची में से एकमात्र सदिश राशि को छाँटिए
ताप, दाब, आवेग, समय, शक्ति पूरी पथ-लंबाई, ऊर्जा, गुरुत्वीय विभव, घर्षण गुणांक, आवेश।

जिस प्रकार समान विमाओं वाली दो सदिश राशियों को जोड़ा या घटाया जा सकता है। इसी प्रकार समान विमाओं वाली दो अदिश राशियों को परस्पर जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है।

हल दी गई राशियों में से केवल आवेग सदिश राशि है।

प्रश्न 4. कारण सहित बताइए कि अदिश तथा सदिश राशियों के साथ क्या निम्नलिखित बीजगणितीय संक्रियाएँ अर्थपूर्ण हैं?

(a) **दो अदिशों को जोड़ना,**
(b) **एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना,**
(c) **एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना,**
(d) **दो अदिशों का गुणन,**
(e) **दो सदिशों को जोड़ना,**
(f) **एक सदिश के घटक की उसी सदिश से जोड़ना।**

हल (a) नहीं, दो अदिश राशियों को जोड़ना अर्थपूर्ण नहीं है क्योंकि समान विमाओं अर्थात् समान मात्रको वाले अदिशों को ही जोड़ा जा सकता है।

(b) नहीं, एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना अर्थपूर्ण नहीं है, क्योंकि एक अदिश को सदिश में नहीं जोड़ा जा सकता है।

(c) हाँ, एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना अर्थपूर्ण है। जब एक सदिश की अदिश से गुणा करते हैं तो हमें एक सदिश प्राप्त होता है जिसका परिमाण सदिश एवं अदिश के परिमाण के गुणनफल के बराबर होता है तथा दिशा दिए गए सदिश की दिशा में होती है।

उदाहरण 4 kg द्रव्यमान का एक पिण्ड 20 m/s के वेग से पूर्व दिशा में गति कर रही है द्रव्यमान तथा वेग गुणनफनल से पिण्ड का संवेग प्राप्त होता है जोकि एक सदिश राशि है।

$$p = mv = 4\,\text{kg} \times (20\,\text{m/s})$$
$$= 80\,\text{kg-m/s},\ \text{पूर्व}$$

(d) हाँ, दो अदिशों का गुणनफल अर्थपूर्ण है। घनत्व ρ तथा आयतन V दोनों अदिश राशियाँ हैं। जब घनत्व का आयतन से गुणा की जाती है तब हमें $\rho \times V = m$, वस्तु का द्रव्यमान प्राप्त होती है जोकि एक अदिश राशि है।

(e) नहीं, दो सदिशों को जोड़ना अर्थपूर्ण नहीं है क्योंकि समान विमा अर्थात् समान मात्रक के सदिशों को ही परस्पर जोड़ा जा सकता है।

(f) हाँ, एक सदिश के घटक का उसी सदिश से जोड़ना अर्थपूर्ण है. क्योंकि दोनों सदिशों की विमांए समान हैं।

प्रश्न 5. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण सहित बताइए कि यह सत्य है या असत्य

(ɑ) **किसी सदिश का परिमाण सदैव एक अदिश होता है,**
किसी सदिश का प्रत्येक घटक सदैव अदिश होता है,

(c) **किसी कण द्वारा चली गई पथ की कुल लम्बाई सदैव विस्थापन सदिश के परिमाण के बराबर होती है,**

(d) **किसी कण की औसत चाल (पथ तय करने में लगे समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई) समय के समान-अंतराल में कण के औसत वेग के परिमाण से अधिक या उसके बराबर होती है।**

(e) **उन तीन सदिशों का योग जो एक समतल में नहीं हैं, कभी भी शून्य सदिश नहीं होता।**

हल (a) सत्य, क्योंकि एक सदिश का परिमाण सदैव एक संख्या होता है जोकि एक अदिश है।

(b) असत्य, क्योंकि एक सदिश का प्रत्येक घटक सदैव एक सदिश होता है।

(c) सत्य, केवल जब वस्तु सरल रेखा में एक ही दिशा में गति कर रही हो अन्यथा असत्य।

(d) सत्य, क्योंकि औसत चाल $= \dfrac{\text{पथ की कुल लम्बाई}}{\text{कुल समय}}$

तथा औसत वेग $= \dfrac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल लगा समय}}$

परन्तु पथ की कुल लम्बाई सदैव उसी समयान्तराल में विस्थापन के परिमाण के बराबर या उससे अधिक होती है। अतः औसत चाल समान समयान्तराल में कण के औसत वेग के परिमाण के बराबर या उससे अधिक होता है

(e) सत्य, क्योंकि तीन सदिश, जो एक समतल में नहीं हैं, एक त्रिभुज की क्रम में ली गई तीन भुजाओं को प्रदर्शित नहीं कर सकते हैं।

प्रश्न 6. निम्नलिखित असमिकाओं की ज्यामिति या किसी अन्य विधि द्वारा स्थापना कीजिए

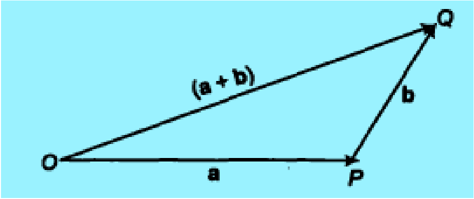
(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \ge |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

इनमें समिका (समता) का चिह्न कब लागू होता है?

त्रिभुज के गुणों से, किसी त्रिभुज की एक भुजा की लम्बाई उसकी शेष दो भुजाओं की लम्बाईयों के योग से सदैव कम होती है।

हल माना दो सदिशों **a** तथा **b** को त्रिभुज OPQ की एक क्रम भुजाओं OP तथा PQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा उसका परिणामों OQ द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



(a) त्रिभुज के गुणों से, किसी त्रिभुज की एक भुजा, उसकी शेष दो भुजाओं के योग से सदैव कम होती है।

$\therefore \Delta OPQ$ में,

$$OQ < OP + PQ$$

अथवा $$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad ...(i)$$

यदि सदिश **a** व **b** एक ही रेखा में समान दिशा में कार्यरत् हैं तब इनके परिणामी सदिश का परिमाण,

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} \qquad (\because \theta = 0°)$$

$$= \sqrt{(a+b)^2}$$

$$= (a + b)$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad ...(ii)$$

समी (i) व (ii) से,

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

दोनों पक्ष समान होंगे जब दोनों सदिश **a** तथा **b** समान दिशा में एक ही रेखा के अनुदिश हों।

(b) त्रिभुज के गुणों से त्रिभुज की एक भुजा शेष दो भुजाओं के अन्तर से अधिक होती है। अतः ΔOPQ में,

$$OQ > |OP - PQ|$$

दाएँ पक्ष में $(OP - PQ)$ का परिमाण लिया गया है क्योंकि OQ धनात्मक है तथा $(OP - PQ)$ ऋणात्मक हो सकता है, यदि $PQ > OP$

$$\therefore \qquad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \qquad ...(iii)$$

यदि दिए गए दोनों सदिश एक ही रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् हो, तब

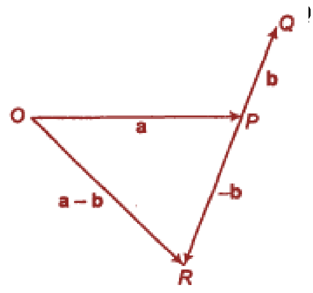
$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \qquad ...(iv)$$

समी (iii) व (iv) से,

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$$

यदि सदिश **a** व **b** एक ही सरल रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् हैं तो समानता चिह्न मान्य होगा।

(c) यदि **PR** सदिश **−b** को तथा सदिश **a** व **−b** का परिणामी **OR** के द्वारा प्रदर्शित हो तब,



त्रिभुज के गुणों से, किसी त्रिभुज की एक भुजा उसकी शेष दो भुजाओं की लम्बाईयों के योग से कम होती है। अतः ΔOPR में,

$$\therefore \qquad OR < OP + PR$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |-\mathbf{b}|$$

परन्तु $|-\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$, क्योंकि किसी सदिश का परिमाण सदैव धनात्मक होता है।

अथवा $$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad \ldots(v)$$

यदि सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ एक सरल रेखा में परस्पर विपरीत दिशा में कार्यरत् हैं, तब

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad \ldots(vi)$$

समी (v) व (vi) से,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(d) त्रिभुज के गुणों से, त्रिभुज की एक भुजा इसकी शेष दो भुजाओं के अन्तर से अधिक होती है।

$\therefore \Delta OPR$ में,

$$OR > |OP - PR|$$

दाएँ पक्ष में $(OP - PR)$ का परिमाण लिया गया है, क्योंकि बाएँ पक्ष में OR धनात्मक है परन्तु दाएँ पक्ष में $(OP - PR)$ ऋणात्मक हो सकता है। यदि $PR > OP$

$$\therefore \qquad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| - |-\mathbf{b}|$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| > |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \qquad \ldots(vii)$$

यदि सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ एक ही सरल रेखा में समान दिशा में हैं, तब

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \qquad \ldots(viii)$$

समी (vii) तथा (viii) से,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \ge |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$$

दोनों पक्ष बराबर होगें यदि सदिश $\mathbf{a}$ तथा $\mathbf{b}$ एक ही रेखा में समान दिशा में हों।

प्रश्न 7. दिया है $a + b + c + d = 0$, नीचे दिए गए कथनों में से कौन-सा सही हैं?

(a) a, b, c तथा d में से प्रत्येक शून्य सदिश है,

(b) $(a + c)$ का परिमाण $(b + d)$ के परिमाण के बराबर है,

(c) a का परिमाण b, c तथा d के परिमाणों के योग से कभी भी अधिक नहीं हो सकता,

(d) यदि a तथा d संरेखीय नहीं हैं तो $b + c$ अवश्य ही a तथा d के समतल में होगा और यह a तथा d के अनुदिश होगा यदि वे संरेखीय हैं।

हल (a) सही नहीं हैं, क्योंकि $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ केवल $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ व $\mathbf{d}$ के शून्य सदिश होने के अतिरिक्त कई अनेक प्रकार से शून्य हो सकता है, जैसे-यदि सदिश भिन्न दिशाओं में कार्यरत् हैं तब भी उनका परिणामी शून्य हो सकता है।

(b) सही है, क्योंकि $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$

$$\therefore \qquad \mathbf{a} + \mathbf{c} = -(\mathbf{b} + \mathbf{d})$$

अथवा $$|\mathbf{a} + \mathbf{c}| = |\mathbf{b} + \mathbf{d}|$$

(c) सत्य, क्योंकि $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$

$\therefore \qquad \mathbf{a} = -(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$

अथवा $\qquad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|$

अतः सदिश **a** का परिमाण $(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$ के परिमाण के बराबर होगा। सदिश $(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$ का परिमाण सदिशों **b**, **c** तथा **d** के परिमाणों के योग के बराबर या उससे कम होगा परन्तु कभी उससे अधिक नहीं हो सकता है। अतः सदिश **a** का परिमाण कभी भी सदिश **b**, **c** व **d** के परिमाणों के योग से अधिक नहीं हो सकता है।

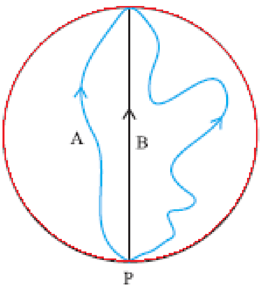
(d) सही है क्योंकि $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$

अथवा $\qquad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{d}=0$

तीन सदिशों **a**, $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ तथा **d** का परिणामी केवल तभी शून्य हो सकता है जब वे एक तल में स्थित हों तथा किसी त्रिभुज की एक क्रम में ली गई तीनों भुजाओं को प्रदर्शित करते हों।

यदि सदिश **a** तथा **b** एक ही रेखा के अनुदिश या समतापीय हैं, तब सदिश $(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ भी उसे रेखा में होगा केवल तभी इन सदिशों का योग शून्य हो सकता है।

प्रश्न 8. तीन लड़कियाँ 200 m त्रिज्या वाली वृत्तीय बर्फीली सतह पर स्केटिंग कर रही हैं। वे सतह के किनारे के बिंदु P से स्केटिंग शुरू करती हैं तथा P के व्यासीय विपरीत बिन्दु Q पर विभिन्न पथों से होकर पहुँचती हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। प्रत्येक लड़की के विस्थापन सदिश का परिमाण कितना है? किस लड़की के लिए यह वास्तव में स्केट किए गए पथ की लंबाई के बराबर है?



प्रारम्भिक एवं अन्तिम स्थितियों के बीच की लघुत्तम दूरी को विस्थापन कहते हैं।

हल वृत्तीय पार्क की त्रिज्या = 200 m

प्रत्येक लड़की का विस्थापन, वृत्तीय पार्क के व्यास के बराबर है।

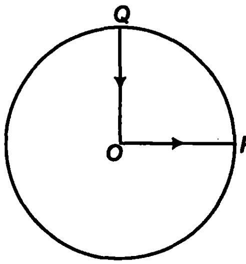
$\therefore$ विस्थापन = वृत्तीय पार्क का व्यास

$= 2 \times 200$

$= 400\text{ m}$

लड़की B का विस्थापन, उसके द्वारा तय पथ की कुल लम्बाई के बराबर है।

प्रश्न 9. कोई साइकिल सवार किसी वृत्तीय पार्क के केन्द्र O से चलना शुरू करता है तथा पार्क के किनारे P पर पहुँचता है। पुनः वह पार्क की परिधि के अनुदिश साइकिल चलाता हुआ QO के रास्ते (जैसे चित्र में दिखाया गया है) केंद्र पर वापस आ जाता है। पार्क की त्रिज्या 1 km है। यदि पूरे चक्कर में 10 min लगते हों तो साइकिल सवार का (a) कुल विस्थापन, (b) औसत वेग, तथा (c) औसत चाल क्या होगी?



जब कोई वस्तु अपनी प्रारम्भिक स्थिति में वापस लौट आती है तब उसका परिणामी विस्थापन शून्य हो जाता है।

हल दिया है, वृत्तीय पार्क की त्रिज्या = 1 km

(a) क्योंकि साइकिल सवार अपनी प्रारम्भिक स्थिति में वापस लौट आता है अतः उसका परिणामी विस्थापन शून्य होगा।

(b) औसत वेग $= \dfrac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल लगा समय}} = \dfrac{0}{\text{कुल लगा समय}} = 0$

(c) साइकिल सवार का कुल विस्थापन

$= OP + (PQ + QO)$ पथ की वास्तविक लम्बाई

$$= r + \left(\frac{1}{4} \times 2\pi r\right) + r$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 1\right) + 1$$

$$= 2 + \frac{11}{7}$$

$$= \frac{25}{7}\text{ km}$$

कुल लगा समय = 10 min

$$= \frac{10}{60}\text{ h} = \frac{1}{6}\text{ h}$$

$\therefore$ साइकिल सवार की औसत चाल $= \dfrac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{कुल लगा समय}}$

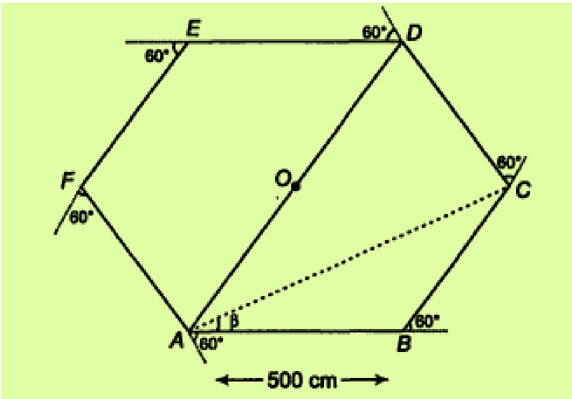
$$= \frac{25/7}{1/6} = \frac{150}{7} = 21.43\text{ km/h}$$

प्रश्न 10. किसी खुले मैदान में कोई मोटर चालक एक ऐसा रास्ता अपनाता है जो प्रत्येक 500 m के बाद उसके बाई ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है। किसी दिए मोड़ से शुरू होकर मोटर चालक का तीसरे, छठे व आठवें मोड़ पर विस्थापन बताइए। प्रत्येक स्थिति में मोटर चालक द्वारा इन मोड़ों पर तय की गई कुल पथ-लंबाई के साथ विस्थापन के परिमाण की तुलना कीजिए।

क्योंकि मोटर चालक प्रत्येक 500 m दूरी के बाद अपनी बायीं ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है, अतः वह एक समष्टाकार पथ पर गति कर रहा है।

हल दूरी जिसके पश्चात् मोटर चालक मुड़ता है = 500 m

साइकिल सवार प्रत्येक 500 m दूरी तय करने के बाद बायीं और 60° के कोण पर मुड़ जाता है अतः वह एक समष्टाकार पथ पर गति कर रहा है। माना मोटर चालक बिन्दु A से गति प्रारम्भ कर तीसरे सेकण्ड के अन्त में बिन्दु D पर, तथा छठे सेकण्ड के अन्त पर अपनी प्रारम्भिक स्थिति A पर आठवें सेकण्ड के अन्त पर बिन्दु C पर पहुँचता है।



(a) मोटर चालक का तीसरे सेकण्ड के अन्त में विस्थापन $= AD = AO + OD$

$= 500 + 500$

$= 1000\,\text{m}$

पथ की कुल लम्बाई $= AB + BC + CD$

$= 500 + 500 + 500$

$= 1500\,\text{m}$

$$\therefore \quad \frac{\text{विस्थापन का परिमाण}}{\text{पथ की कुल लम्बाई}} = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3} = 0.67$$

(b) छठें मोड़ पर मोटर चालक अपनी प्रारम्भिक स्थिति A पर होगा।

$\therefore$ मोटर चालक का छठें मोड़ पर विस्थापन $= 0$

पथ की कुल लम्बाई $= AB + BC + CD + DE + EF + FA$

$= 500 + 500 + 500 + 500 + 500 + 500$

$= 3000\,\text{m}$

$$\therefore \quad \frac{\text{विस्थापन का परिमाण}}{\text{पथ की कुल लम्बाई}} = \frac{0}{3000} = 0$$

(c) आठवें मोड़ पर मोटर चालक बिन्दु C पर है।

$\therefore$ मोटर चालक का विस्थापन $= AC$

सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{(500)^2 + (500)^2 + 2 \times 500 \times 500 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3 \times (500)^2}$$

$$= 500\sqrt{3} \text{ m}$$

$$= 500 \times 1.732 \text{ m} = 866 \text{ m}$$

यह AB दिशा से β कोण अन्तरित करता है,

अतः $$\tan\beta = \frac{500 \sin 60^\circ}{500 + 500 \cos 60^\circ}$$

$$= \frac{500 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{500 + 500 \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{500 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{500\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

अथवा $$\beta = 30^\circ$$

$\therefore$ मोटर चालक का आठवें मोड़ के अन्त पर विस्थापन 866 m है जो प्रारम्भिक गति की दिशा से 30° का कोण बनाता है।

$$\text{पथ की कुल लुम्बाई} = 8 \times 500 = 4000 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{विस्थापन का परिमाण}}{\text{पथ की कुल लम्बाई}} = \frac{500\sqrt{3}}{4000} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$= 0.22$$

प्रश्न 11. कोई यात्री किसी नए शहर में आया है और वह स्टेशन से किसी सीधी सड़क पर स्थित किसी होटल तक जो 10 km दूर है, जाना चाहता है। कोई बेईमान टैक्सी चालक 23 km के चक्करदार रास्ते से उसे ले जाता है और 28 min में होटल में पहुँचता है।

(a) टैक्सी की औसत चाल, और

(b) औसत वेग का परिमाण क्या होगा? क्या वे बराबर हैं?

हल दिया है, स्टेशन तथा होटल के बीच की लघुत्तम दूरी = 10 km

∴ टैक्सी का विस्थापन = 10 km

टैक्सी द्वारा तय की गई दूरी = 23 km

टैक्सी द्वारा लिया गया समय = 28 min $= \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$ h

(a) टैक्सी की औसत चाल = $\frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{कुल लगा समय}}$

$$= \frac{23}{(7/15)} = \frac{345}{7} \text{ km/h}$$

$$= 49.3 \text{ km/h}$$

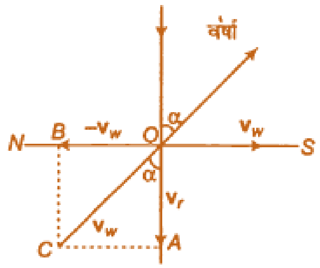
(b) औसत वेग का परिमाण = $\frac{\text{कुल विस्थापन का परिमाण}}{\text{कुल लगा समय}}$

$$= \frac{10}{(7/15)} = \frac{150}{7} \text{ km/h}$$

$$= 21.43 \text{ km/h}$$

अतः टैक्सी की औसत चाल, टैक्सी के औसत वेग के परिमाण के बराबर नहीं है।

प्रश्न 12. वर्षा का पानी 30 m/s की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे गिर रहा है। कोई महिला उत्तर से दक्षिण की ओर 10 m/s की चाल से साइकिल चला रही है। उसे अपना छाता किस दिशा में रखना चाहिए?



हल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गिरती वर्षा का वेग

$$\mathbf{v}_r = 30 \text{ m/s}$$

साइकिल सवार महिला का वेग

$$\mathbf{v}_W = 10 \text{ m/s} \quad \text{(उत्तर से दक्षिण की ओर)}$$

स्वयं को वर्षा से बचाने के लिए, महिला को अपना छाता, वर्षा के महिला के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}_{rW}$ की दिशा में पकड़ना चाहिए।

वर्षा का महिला के सापेक्ष वेग,

$$\mathbf{v}_{rW} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_W$$

$\therefore \quad |\mathbf{v}_{rw}| = \sqrt{(30)^2 + (10)^2}$

$= \sqrt{900 + 100} = \sqrt{1000}$ m/s

$= 10\sqrt{10}$ m/s

यदि $\mathbf{v}_{rw}$, ऊर्ध्वाधर से α कोण बनाता है, तब

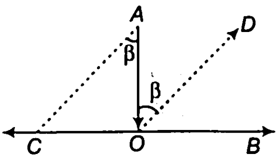
$$\tan\alpha = \frac{v_w}{v_r} = \frac{10}{30}$$

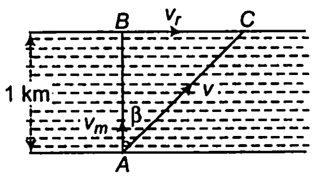
$$= \frac{1}{3} = 0.3333$$

अथवा $\alpha = 18°26'$

अतः महिला को अपना छाता ऊर्ध्वाधर से दक्षिण की ओर 18° 26′ कोण पर पकड़ना चाहिए।

प्रश्न 13. कोई व्यक्ति स्थिर पानी में 4.0 km/h की चाल से तैर सकता है। उसे 1.0 km चौड़ी नदी को पार करने में कितना समय लगेगा यदि नदी 3.0 km/h की स्थिर चाल से बह रही हो और वह नदी के बहाव के लंबवत् तैर रहा हो। जब वह नदी के दूसरे किनारे पहुँचता है तो वह नदी के बहाव की ओर कितनी दूर पहुँचेगा?





हल दिया है, व्यक्ति की चाल $(v_m) = 4$ km/h

नदी की चाल $(v_r) = 3$ km/h

नदी की चौड़ाई $(d) = 1$ km

व्यक्ति द्वारा नदी को पार करने में लगा समय

$$t = \frac{\text{नदी की चौड़ाई}}{\text{व्यक्ति की चाल}}$$

$$= \frac{1 \text{ km}}{4 \text{ km/h}} = \frac{1}{4} \text{ h} = \frac{1}{4} \times 60 = 15 \text{ min}$$

नदी के बहाव की ओर तय दूरी $= v_r \times t = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ km $= \frac{3000}{4} = 750$ m

प्रश्न 14. किसी बंदरगाह में 72 km/h की चाल से हवा चल रही है और बंदरगाह में खड़ी किसी नौका के ऊपर लगा झंडा *N-E* दिशा में लहरा रहा है। यदि वह नौका उत्तर की ओर 51 km/h चाल से गति करना प्रारंभ कर दे तो नौका पर लगा झंडा किस दिशा में लहराएगा?

हल बंदरगाह में खड़ी नाव के ऊपर लगा झंडा *N-E* दिशा में लहरा रहा है, अतः हवा का वेग *N-E* दिशा में है।

वायु का वेग = 72 km/h (*N-E*)

नौका का वेग = 51 km/h (उत्तर)

जब नौका उत्तर दिशा में गति करती है तब झंडा वायु की नौका के सापेक्ष वेग की दिशा में लहरायेगा।

v_w तथा $-v_b$ के बीच का कोण = 45° + 90° = 135°

यदि वायु का नौका के सापेक्ष वेग (v_{wb}) वायु की दिशा से β कोण बनाता है, तब

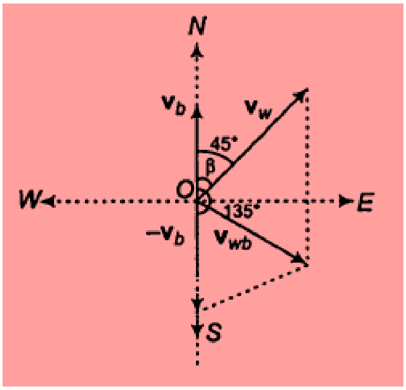
$$\tan\beta = \frac{v_b \sin 135°}{v_w + v_b \cos 135°} \qquad \left[\begin{array}{l} \because \sin 135° = \sin(180° - 45°) \\ \qquad = \sin 45° \\ \text{तथा } \cos 135° = \cos(180° - 45°) \\ \qquad = -\cos 45° \end{array}\right]$$

$$= \frac{51 \sin 45°}{72 + 51(-\cos 45°)}$$

$$= \frac{51 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{72 + 51\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{51}{72\sqrt{2} - 51} = 1.0034$$

$$= \tan(45.1°)$$



अथवा $\beta = 45.1°$

पूर्व दिशा के सापेक्ष कोण = 45.1° − 45°

= 0.1°

अतः झंडा लगभग पूर्व दिशा में लहराएगा।

प्रश्न 15. किसी लंबे हॉल की छत 25 m ऊंची है। वह अधिकतम क्षैतिज दूरी कितनी होगी जिसमें 40 m/s की चाल से फेंकी गई कोई गेंद छत से टकराए बिना गुजर जाए?

एक प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई

$$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

तथा क्षैतिज परास $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

हल दिया है, प्रारम्भिक वेग (u) = 40 m/s

हॉल की ऊँचाई (H) = 25 m

माना गेंद को θ कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है जबकि उसके द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई 25 m है।

गेंद द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई

$$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$25 = \frac{(40)^2 \sin^2\theta}{2 \times 9.8}$$

अथवा $$\sin^2\theta = \frac{25 \times 2 \times 9.8}{1600}$$

$$= 0.3063$$

अथवा $$\sin\theta = 0.5534$$

$$= \sin 33.6°$$

अथवा $$\theta = 33.6°$$

∴ $$\text{क्षैतिज परास } (R) = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(40)^2 \sin 2 \times 33.6°}{9.8}$$

$$= \frac{1600 \times \sin 67.2°}{9.8}$$

$$= \frac{1600 \times 0.9219}{9.8} = 150.5 \text{ m}$$

प्रश्न 16. क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को 100 m की अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। वह खिलाड़ी उसी गेंद को जमीन से ऊपर कितनी ऊँचाई तक फेंक सकता है?

क्षैतिज परास अधिकतम होता है जब प्रक्षेपण कोण 45° होता है।

हल प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

यदि $\theta = 45°$ तब R अधिकतम होगा तथा इसका मान

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

दिया है, $$R_{max} = 100 \text{ m}$$

∴ $$100 = \frac{u^2}{g} \quad \ldots(i)$$

जब क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को ऊर्ध्वाधर फेंकता है तो गेंद H ऊँचाई तक जाती है।

गति के समीकरण से,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$(0)^2 = u^2 + 2(-g)H$$

अथवा $$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{g}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ m} \quad \text{[समी (i)]}$$

प्रश्न 17. 80 cm लंबे धागे के एक सिरे पर एक पत्थर बाँधा गया है और इसे किसी एकसमान चाल के साथ किसी क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। यदि पत्थर 25 s में 14 चक्कर लगाता है तो पत्थर का त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा क्या होगी?

एकसमान वृत्तीय गति में वस्तु पर त्वरण $a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ उसके वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर कार्य करता है।

हल क्षैतिज वृत्त की त्रिज्या = धागे की लम्बाई = 80 cm = 0.80 m

वृत्तीय गति की आवृत्ति $(n) = \frac{14}{25}\,s^{-1}$

पत्थर की वृत्तीय गति की कोणीय चाल

$$\omega = 2\pi n = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{14}{25} = \frac{88}{25}\ \text{rad/s}$$

पत्थर का अभिकेन्द्र त्वरण $(a) = r\omega^2$

$$= 0.80 \times \left(\frac{88}{25}\right)^2 = 0.80 \times \frac{88}{25} \times \frac{88}{25} = 9.91\ \text{m/s}^2$$

त्वरण की दिशा क्षैतिज वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर अर्थात् उसकी त्रिज्या के अनुदिश है।

प्रश्न 18. कोई वायुयान 900 km/h की एकसमान चाल से उड़ रहा है और 1.00 km त्रिज्या का कोई क्षैतिज लूप बनाता है। इसके अभिकेंद्र त्वरण की गुरुत्वीय त्वरण के साथ तुलना कीजिए।

हल क्षैतिज लूप की त्रिज्या $(r) = 1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$

वायुयान की चाल $(v) = 900\ \text{km/h}$

$$= 900 \times \frac{5}{18}\ \text{m/s} \qquad \left(\because 1\ \text{km/h} = \frac{5}{18}\ \text{m/s}\right)$$

$$= 250\ \text{m/s}$$

वायुयान का अभिकेन्द्र $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(250)^2}{1000} = \frac{62500}{1000}$

$$= 62.5\ \text{m/s}^2$$

गुरुत्वीय त्वरण $(g) = 9.8\ \text{m/s}^2$

$$\therefore \quad \frac{\text{अभिकेन्द्र त्वरण } (a)}{\text{गुरुत्वीय त्वरण } (g)} = \frac{62.5}{9.8} = 6.38$$

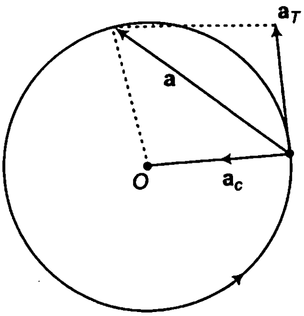
प्रश्न 19. नीचे दिए गए कथनों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण सहित बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य

(a) वृत्तीय गति में किसी कण का नेट त्वरण हमेशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर होता है।

(b) किस बिंदु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिंदु पर कण के पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है?

(c) किसी कण का एकसमान वृत्तीय गति में एक चक्र में लिया गया औसत त्वरण सदिश एक शून्य सदिश होता है।

हल (a) असत्य, क्योंकि एकसमान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्र त्वरण की दिशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र की ओर होती है परन्तु असमान वृत्तीय गति में परिणामी त्वरण की दिशा त्रिज्या में अनुदिश केन्द्र की ओर नहीं होती है।



(b) सत्य, क्योंकि किसी बिन्दु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिन्दु पर कण के पथ की र्स्पश रेखा के अनुदिश होता है गति चाहे रेखीय हो, वृत्तीय या वक्रीय।

(c) सत्य, क्योंकि एकसमान वृत्तीय गति में त्वरण सदिश की दिशा सदैव वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर होती है जोकि समय के साथ निन्तर परिवर्तित होती रहती है। अतः एक पूर्ण चक्र के लिए इन सभी सदिशों का परिणामी एक शून्य सदिश होता है।

प्रश्न 20. किसी कण की स्थिति सदिश निम्नलिखित है

$$\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}\ \text{m}$$

समय t सेकंड में है तथा गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि r में मीटर में व्यक्त हो जाए।

(a) कण का **v** तथा **a** निकालिए,

(b) $t = 2\,\text{s}$ पर कण के वेग का परिमाण तथा दिशा कितनी होगी?

हल कण का स्थिति सदिश

$$\mathbf{r} = 3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}}\ \text{m}$$

(a) कण का वेग, $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}})$

$$= (3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0t\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

कण का त्वरण, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{t}(3.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0t\,\hat{\mathbf{j}})$

$$= 0\cdot\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,\hat{\mathbf{j}} = (-4.0\,\hat{\mathbf{j}})\,\text{m/s}^2$$

(b) कण का समय $t = 2$ s पर वेग,

$$\mathbf{v} = (3.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\times 2\,\hat{\mathbf{j}})\,\text{m/s} = (3.0\hat{\mathbf{i}} - 8.0\,\hat{\mathbf{j}})\,\text{m/s}$$

अथवा $$v = \sqrt{(3.0)^2 + (8.0)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

$$= 8.54\ \text{m/s}$$

यदि वेग, x-अक्ष से θ कोण बनाता है, तब

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{8.0}{3.0} = -2.667$$

$$= -\tan 69.5^\circ$$

$\theta = 69.5^\circ$, x-अक्ष से नीचे की ओर

$\therefore$ अतः $t = 2$ s पर कण का वेग x-अक्ष से नीचे की ओर 8.45 m/s,69.5° कोण बनाता है।

प्रश्न 21. कोई कण $t = 0$ क्षण पर मूल बिन्दु से $10.0\hat{\mathbf{j}}$ m/s के वेग से चलना प्रारंभ करता है तथा X-Y समतल में एकसमान त्वरण $(8.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2 से गति करता है।

(a) किस क्षण कण का x-निर्देशांक 16 m होगा? इसी समय इसका y-निर्देशांक कितना होगा? कण कल चाल कितनी होगी?

(b) किसी क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल दिया है, $t = 0, u = 10.0\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

$$\text{त्वरण}\ (\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\,\text{m/s}^2$$

अथवा $$d\mathbf{v} = (8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\,dt$$

दोनों पक्षों का गति सीमा में समाकलन करने पर,

$$\int_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^t (8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\,dt$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\,t$$

अथवा $$\mathbf{v} = \mathbf{u} + 8.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

परन्तु $$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

अथवा $$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$$

$$= (\mathbf{u} + 8.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}})\,dt$$

दोनो ओर का संगत सीमाओं में समाकलन करने पर

$$\int_0^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{u} + 8.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}})dt$$

$$\mathbf{r} - 0 = \mathbf{u}t + 8.0 \times \frac{t^2}{2}\hat{\mathbf{i}} + 2.0 \times \frac{t^2}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

अथवा $$\mathbf{r} = 10.0t\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0t^2\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}}$$

अथवा $$x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = 4.0t^2\hat{\mathbf{i}} + (10.0t + t^2)\hat{\mathbf{j}}$$

$\therefore$ $$x = 4.0t^2 \text{ and } y = 10.0t + t^2$$

(a) जब $x = 16\,\text{m}$, तब

$$16 = 4.0t^2$$

अथवा $$t^2 = 4 \Rightarrow t = 2\,\text{s}$$

$\therefore$ $$y = 10.0 \times 2 + (2)^2$$

$$= 24\ \text{m}$$

(b) कण का वेग

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + 8.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 10.0\hat{\mathbf{j}} + 8.0t\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

समय $t = 2\,\text{s}$ पर,

$$\mathbf{v} = 10\hat{\mathbf{j}} + 8 \times 2\hat{\mathbf{i}} + 2 \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 16\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}}$$

$\therefore$ $$v = \sqrt{(16)^2 + (14)^2} = 21.26\,\text{m/s}$$

प्रश्न 22. **$\hat{\mathbf{i}}$ व $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमश : x- व y-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश हैं। सदिशों $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होगा? सदिश $A = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ के $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ के दिशाओं के अनुदिश घटक निकालिए। [आप ग्राफी विधि का उपयोग कर सकते हैं]**

दिया है, सदिश $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

यदि सदिश x-अक्ष से θ कोण अन्तरित करती है, तब

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

हल (a) सदिश $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ का परिमाण $= \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

यदि सदिश x-अक्ष से θ कोण आन्तरित करती है, तब

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$= \tan 45^\circ$$

अथवा $\theta = 45^\circ$

सदिश $(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ का परिमाण $= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

यदि सदिश $(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ x-अक्ष से θ कोण अन्तरित करती है, तब

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{(-1)}{1} = -1$$

$$= -\tan 45^\circ$$

अथवा $\theta = -45^\circ$

अतः सदिश $(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$, x-अक्ष से ऋणात्मक दिशा में 45° का कोण अन्तरित करता है।

(b) सदिश $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ का सदिश $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ की दिशा में घटक ज्ञात करना

माना $\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = (A\cos\theta) \cdot B$$

अथवा $A\cos\theta = \dfrac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B}$

$\therefore$ सदिश $\mathbf{A}$ का सदिश $\mathbf{B}$ की दिशा में घटक का परिमाण $= A\cos\theta$

$$= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{B} = \frac{(2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}} = \frac{2+3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

सदिश $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ के अनुदिश एकांक सदिश

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{|\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}|} = \frac{(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{2}}$$

सदिश $\mathbf{A}$ का $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ के अनुदिश घटक = सदिश $\mathbf{A}$ का $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ के अनुदिश घटक का परिमाण $\cdot \hat{\mathbf{n}}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

सदिश **A** का सदिश $(\hat{i} - \hat{j})$ के अनुदिश घटक का परिमाण

$$= \frac{(2\hat{i} + 3\hat{j})\cdot(\hat{i} - \hat{j})}{|\hat{i} - \hat{j}|}$$

$$= \frac{2\hat{i}\cdot\hat{i} - 3\hat{j}\cdot\hat{j}}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2-3}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

सदिश $(\hat{i} - \hat{j})$ के अनुदिश एकांक सदिश

$$\hat{n} = \frac{(\hat{i} - \hat{j})}{|\hat{i} - \hat{j}|} = \frac{(\hat{i} - \hat{j})}{\sqrt{2}}$$

∴ सदिश **A** का सदिश $(\hat{i} - \hat{j})$ के अनुदिश घटक

= सदिश **A** का सदिश $(\hat{i} - \hat{j})$ के अनुदिश घटक का परिमाण $\cdot\hat{n}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(\hat{i} - \hat{j})}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(\hat{i} - \hat{j})$$

प्रश्न 23. **किसी दिक्स्थान पर एक स्वेच्छ गति के लिए निम्नलिखित सम्बन्ध में से कौन-सा सत्य है?**

(a) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = \frac{1}{2}[\mathbf{v}(t_1) + v(t_2)]$ (b) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)/(t_2 - t_1)]$

(c) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + a\,t$ (d) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

(e) $\mathbf{a}_{\text{औसत}} = [\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)]/(t_2 - t_1)$

यहाँ 'औसत' का आशय समय अंतराल t_1 व t_2 से सम्बन्धित भौतिक राशि के औसत मान से है।

हल सम्बन्ध (b) तथा (e) किसी दिक्स्थान पर स्वेच्छ गति के लिए सत्य हैं जबकि सम्बन्ध (a), (c) तथा (d) असत्य हैं।

क्योंकि वे एकसमान त्वरित गति के लिए सत्य हैं।

प्रश्न 24. **निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्क पढ़िए तथा कारण एवं उदाहरण सहित बताइए कि क्या यह सत्य है या असत्य?**

अदिश वह राशि है जो

(a) **किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती है,**

(b) **कभी ऋणात्मक नहीं होती,**

(c) **विमाहीन होती है,**

(d) **किसी स्थान पर एक बिंदु से दूसरे बिंदु के बीच नहीं बदलती,**

(e) **उन सभी दर्शकों के लिए एक ही मान रखती है चाहे अक्षों से उनके अभिविन्यास भिन्न-भिन्न क्यों न हों।**

हल (a) असत्य, क्योंकि ऐसी अनेक अदिश राशियाँ हैं जो किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती हैं। उदाहरण ऊर्जा एक अदिश राशि है परन्तु यह एक अप्रत्यास्थ टक्कर में संरक्षित नहीं रहती है।

(b) असत्य, क्योंकि कुछ अदिश राशियों ऋणात्मक भी हो सकती हैं। उदाहरण ताप एक अदिश राशि है परन्तु यह ऋणात्मक भी हो सकता है जैसे– –10°C, –33°C आदि।

(c) असत्य, क्योंकि अनेकों अदिश राशियों की विमाएं होती हैं। जैसे-द्रव्यमान, घनत्व, चाल, दाब आदि सभी की विमाएँ होती है।

(d) असत्य, क्योंकि कुछ अदिश राशियाँ किसी स्थान पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु के बीच बदल जाती हैं। जैसे–घनत्व, ताप, आवेश घनत्व आदि अन्तरिक्ष में एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु के बीच परिवर्तित हो जाते हैं।

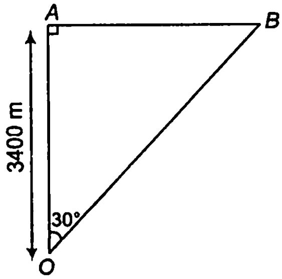
(e) सत्य, क्योंकि अक्षों के अभिविन्यास परिवर्तन का अदिश राशियाँ पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। जैसे–द्रव्यमान, घनत्व आदि अक्षों के अभिविन्यास से स्वतन्त्र रहते हैं।

प्रश्न 25. कोई वायुयान पृथ्वी से 3400 m की ऊँचाई पर उड़ रहा है। यदि पृथ्वी पर किसी अवलोकन बिंदु पर वायुयान की 10 s की दूरी की स्थितियाँ 30° का कोण बनाती हैं तो वायुयान की चाल क्या होगी?

हल माना वायुयान की समय $t = 0$ पर स्थिति A तथा समय $t = 10s$ पर स्थिति B है।

दिया है, $\angle AOB = 30°$ तथा वायुयान की पृथ्वी से ऊँचाई $h = 3400\,m$

समकोण ΔOAB में,



$$\tan 30° = \frac{AB}{OA}$$

अथवा

$$AB = OA \tan 30°$$

$$= 3400 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3400}{1.732}\,m$$

$$\text{वायुयान की चाल} = \frac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{लगा समय}}$$

$$= \frac{3400}{1.732} \times \frac{1}{10}$$

$$= 196.30\,m/s$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 26. किसी सदिश में परिमाण व दिशा दोनों होते हैं। क्या दिक्स्थान में इसकी कोई स्थिति होती है? क्या यह समय के साथ परिवर्तित हो सकता है। क्या दिक्स्थान में भिन्न स्थानों पर दो बराबर सदिशों a व b का समान भौतिक प्रभाव अवश्य पड़ेगा? अपने उत्तर के समर्थन में उदाहरण उदाहरण दीजिए।

हल सामान्यतया एक सदिश की दिक्स्थान में कोई निश्चित स्थिति नहीं होती है, क्योंकि सदिश को दिक्स्थान में कहीं भी उसकी समान्तर दिशा में विस्थापित कर देने पर वह अपरिवर्तित रहता है। जबकि स्थिति सदिश की दिक्स्थान में एक निश्चित स्थिति होती है।

हाँ, एक सदिश समय के साथ परिवर्तित हो सकता है, जैसे-एक त्वरित वस्तु का वेग समय के साथ परिवर्तित होता रहता है।

दिक्स्थान में भिन्न स्थानों पर दो बराबर सदिशों **a** तथा **b** का समान भौतिक प्रभाव होना आवश्यक नहीं है। जैसे–5kg द्रव्यमान की वस्तु पर 100 N का बल भिन्न स्थितियों जैसे पृथ्वी तथा चन्द्रमा में भिन्न प्रभाव उत्पन्न करता है।

प्रश्न 27. किसी सदिश में परिणाम व दिशा दोनों होते हैं। क्या इसका यह अर्थ है कि कोई राशि जिसका परिमाण व दिशा हो, वह अवश्य ही सदिश होगी? किसी वस्तु के घूर्णन की व्याख्या घूर्णन-अक्ष की दिशा और अक्ष के परितः घूर्णन-कोण द्वारा की जा सकती है। क्या इसका यह अर्थ है कि कोई भी घूर्णन एक सदिश है?

हल कोई राशि जिसका परिमाण व दिशा हो, वह अवश्य ही सदिश हो, यह आवश्यक नहीं है। किसी राशि के सदिश होने के लिए आवश्यक है कि उसका परिमाण व दिशा हो तथा वह सदिश योग के नियम का पालन करती हो।

किसी वस्तु का किसी अक्ष के परितः निश्चित घूर्णन एक सदिश नहीं है जबकि इसमें परिमाण व दिशा दोनों हैं। परन्तु यह सदिश योग के नियमों का पालन नहीं करती है। जबकि अतिसूक्ष्म घूर्णन एक सदिश है क्योंकि यह सदिश योग के नियमों का पालन करता है।

प्रश्न 28. क्या आप निम्नलिखित के साथ कोई सदिश संबद्ध कर सकते हैं (a) किसी लूप में मोड़ी गई तार की लंबाई, (b) किसी समतल क्षेत्र, (c) किसी गोले के साथ? व्याख्या कीजिए।

हल (a) नहीं, किसी लूप में मोड़ी गई तार की लम्बाई के साथ हम कोई सदिश सम्बद्ध नहीं कर सकते हैं क्योंकि इसकी कोई निश्चित दिशा नहीं होती है।

(b) हाँ, किसी समतल क्षेत्र के साथ एक सदिश सम्बद्ध किया जा सकता है जिसे क्षेत्रफल सदिश कहते हैं। इसकी दिशा समतल क्षेत्र पर बाहर की ओर खींचे गए अभिलम्ब की दिशा में होती है।

(c) हम किसी गोले के आयतन के साथ एक सदिश सम्बद्ध नहीं कर सकते हैं परन्तु हम किसी गोले के क्षेत्रफल के साथ एक सदिश सम्बद्ध कर सकते हैं।

प्रश्न 29. कोई गोली क्षैतिज से 30° के कोण पर दागी गई है और वह धरातल पर 3 km दूर गिरती है। इसके प्रक्षेप्य के कोण का समायोजन करके क्या 5 km दूर स्थित किसी लक्ष्य का भेद किया जा सकता है? गोली की नालमुख चाल को नियत तथा वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानिए।

हल प्रक्षेपण कोण $(\theta) = 30°$

क्षैतिज परास $(R) = 3\,km = 3000\,m$

क्षैतिज परास $(R) = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$ अथवा $\dfrac{u^2}{g} = \dfrac{R}{\sin 2\theta}$

अथवा $$\frac{u^2}{g} = \frac{3000}{\sin 60°} = \frac{3000}{\sqrt{3}/2}$$

$$\frac{u^2}{g} = \frac{6000}{\sqrt{3}} \quad \ldots(i)$$

जब गोली को क्षैतिज से 45° के कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है तब इसका क्षैतिज परास अधिकतम होता है।

$\therefore$ $$R_{max} = \frac{u^2 \sin(2 \times 45°)}{g} = \frac{u^2}{g}$$

$$= \frac{6000}{\sqrt{3}} = 2000\sqrt{3} = 3464\,m$$

अतः गोली को उसी नालमुख चाल से 5000 m की दूरी तक नहीं दागी जा सकती है।

प्रश्न 30. कोई लड़ाकू जहाज 1.5 km की ऊँचाई पर 720 km/h की चाल से क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है और किसी वायुयान भेदी तोप के ठीक ऊपर से गुजरता है। ऊर्ध्वाधर से तोप की नाल का क्या कोण हो जिससे 600 m/s की चाल से दागा गया गोला वायुयान पर वार कर सके? वायुयान के चालक को किस न्यूनतम ऊँचाई पर जहाज को उड़ाना चाहिए जिससे गोला लगने से बच सके? ($g = 10\,m/s^2$)

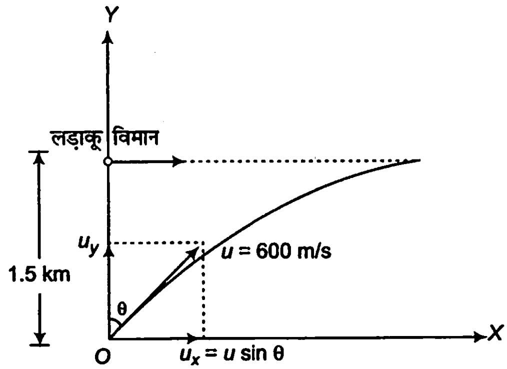
हल लड़ाकू जहाज का वेग $(v) = 720\,km/h$

$$= 720 \times \frac{5}{18}\,m/s \qquad \left(1\,km/h = \frac{5}{18}\,m/s\right)$$

$$= 200\,m/s$$

लड़ाकू जहाज की ऊँचाई $(h) = 1.5\,km = 1500\,m$

गोले की चाल $= 600\,m/s$



माना तोप से गोला ऊर्ध्वाधर से θ कोण पर दागा जाता है तथा t समय बाद जहाज से टकराता है। गोले की चाल का क्षैतिज घटक $(u_x) = u\sin\theta$

गोले की चाल का ऊर्ध्वाधर घटक $(u_y) = u\cos\theta$

जब गोला जहाज से टकराता है तब

जहाज द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी = गोले द्वारा तय क्षैतिज दूरी

$$v \times t = u\sin\theta \times t$$

$$200 \times t = 600\sin\theta \times t$$

अथवा
$$\sin\theta = \frac{200}{600} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

$$= \sin 19.5°$$

अथवा
$$\theta = 19.5°$$

अतः जहाज से टकराने के लिए तोप से गोला ऊर्ध्वाधर से 19.5° कोण पर दागा जाना चाहिए। लड़ाकू जहाज, वायुयान भेदी तोप के गोले से बच सकता है, यदि उसकी ऊँचाई गोले द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई के बराबर या उससे अधिक हो।

$$H = \frac{u^2\sin^2(90° - \theta)}{2g} = \frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{(600)^2\cos^2 19.5°}{2 \times 10}$$

$$= \frac{600 \times 600 \times \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2}{20} \qquad \left(\because \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$

$$= \frac{30 \times 600 \times 8}{9}$$

$$= 16000\,\text{m} = 16\,\text{km}$$

अतः लड़ाकू जहाज का विमान भेदी तोप से दागे गए गोले से बचने के लिए न्यूनतम 16 km ऊँचाई पर उड़ना चाहिए।

प्रश्न 31. **एक साइकिल सवार 27 km/h की चाल से साइकिल चला रहा है। जैसे ही सड़क पर वह 80 m त्रिज्या के वृत्तीय मोड़ पर पहुँचता है, वह ब्रेक लगाता है और अपनी चाल को 0.5 m/s की एकसमान दर से कम कर लेता है। वृत्तीय मोड़ पर साइकिल सवार के नेट त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा निकालिए।**

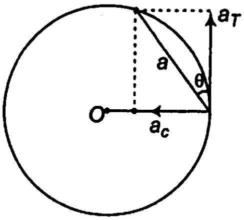
हल साइकिल सवार की चाल $(v) = 27$ km/h

$$= 27 \times \frac{5}{18}\,\text{m/s} \qquad \left(\because 1\,\text{km/h} = \frac{5}{18}\,\text{m/s}\right)$$

$$= \frac{15}{2}\,\text{m/s}$$

वृत्तीय मोड़ की त्रिज्या $(r) = 80\,m$

$\therefore$ साइकिल सवार पर कार्यरत् अभिकेन्द्र त्वरण



$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(15/2)^2}{80}$$

$$= \frac{225}{4 \times 80}\ m/s^2$$

$$= 0.70\ m/s^2$$

ब्रेक द्वारा लगाया गया स्पर्श रेखीय त्वरण

$$a_T = 0.5\ m/s^2.$$

अभिकेन्द्र त्वरण तथा स्पर्श रेखीय त्वरण परस्पर लम्बवत् दिशा में कार्य करते हैं

$\therefore$ परिणामी त्वरण $a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2}$

$$= \sqrt{(0.7)^2 + (0.5)^2}$$

$$= \sqrt{0.49 + 0.25}$$

$$= \sqrt{0.74} = 0.86\ m/s^2$$

यदि परिणामी त्वरण वेग की दिशा से θ कोण बनाए तब

$$\tan\theta = \frac{a_c}{a_T} = \frac{0.7}{0.5} = 1.4$$

$$= \tan 54°28'$$

$\therefore$ $\theta = 54°28'$

प्रश्न 32. (a) **सिद्ध कीजिए कि किसी प्रक्षेप्य के x-अक्ष तथा उसके वेग के बीच के कोण को समय के फलन के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं**

$$t = \tan^{-1}\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}$$

(b) **सिद्ध कीजिए कि मूल बिंदु से फेंके गए प्रक्षेप्य कोण का मान** $= \tan^{-1}\left(\frac{4\,hm}{R}\right)$ **होगा। यहाँ प्रयुक्त प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।**

हल (a) माना प्रक्षेप्य को v_0 वेग से क्षैतिज से θ_0 कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। प्रारम्भिक वेग के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटक v_{0x} तथा v_{0y} हैं।

माना प्रक्षेप्य t समय बाद बिन्दु P पर है।

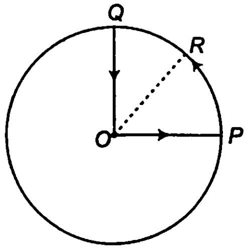
बिन्दु P क्षैतिज वेग

$$v_{ty} = v_{0x} \quad (\because \text{ क्षैतिज दिशा में कोई त्वरण नहीं है।})$$

बिन्दु P पर ऊर्ध्वाधर वेग

$$v_{tg} = v_{0y} - gt$$

यदि बिन्दु P पर परिणामी वेग x-अक्ष में θ कोण बनाता है, तब



$$\tan\theta(t) = \frac{v_{ty}}{v_{tx}}$$

$$= \frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}$$

अथवा $$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}}\right)$$

(b) प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई

$$h_m = \frac{u^2\sin^2\theta_0}{2g} \quad \ldots(i)$$

$$\text{क्षैतिज परास } (R) = \frac{u^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$$= \frac{u^2}{g} \times 2\sin\theta_0\cos\theta_0 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर,

हमें प्राप्त होता है, $$\frac{h_m}{R} = \frac{u^2\sin^2\theta_0}{2g} \times \frac{g}{u^2 \times 2\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

$$= \frac{\sin\theta_0}{4\cos\theta_0}$$

अथवा $$\tan\theta_0 = \frac{4h_m}{R}$$

अथवा $$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{4h_m}{R}\right)$$